Fliegen verstehen – *Understanding flying*
Das Strömungsfeld – *The flow field*
Erhaltungssätze – *Conservation laws*
Vektoranalysis – *Vector analysis*
Ideales Fluid – *Ideal Fluid*
Widerstand und Auftrieb – *Drag and lift*
Wirbeltransportgleichung – *Vorticity-transport equation*
Wechselwirkung Fluid/Struktur – *Interaction fluid/structure*

Mathematische Grundlagen des Fliegens

Mathematical Foundations of Flying

Vortrag am Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik, Potsdam - 5. März 2007
(Lecture given in English – German legend)

Wolfgang Send

Institut für Aeroelastik - Göttingen

“Alles Fliegen beruht auf Erzeugung von Luftwiderstand, alle Flugarbeit besteht in Überwindung von Luftwiderstand.“

Otto Lilienthal (1848 - 1896), *Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst*, Berlin 1889

„Wenn ein Körper sich durch die Luft bewegt, so werden die Luftteile vor dem Körper gezwungen, auszuweichen und selbst gewisse Wege einzuschlagen.

Auch hinter dem Körper wird die Luft in Bewegung geraten. Die hinter dem Körper befindliche Luft wird teilweise die Bewegungen des Körpers mitmachen, und außerdem werden gewisse regelmäßige Wirbelbewegungen in der Luft entstehen, welche sich noch eine Zeit lang auf dem von dem Körper in der Luft beschriebenen Wege vorfinden werden und erst allmählich durch die gegenseitige Reibung aneinander zur Ruhe kommen.

Der vorher in Ruhe befindlichen Luft müssen alle diese Bewegungen, die für das Hindurchlassen des Körpers durch die Luft nötig sind, erst erteilt werden; und deshalb setzt die Luft dem in ihr bewegten Körper einen gewissen meßbaren Widerstand entgegen, zu dessen Überwindung eine gleich große Kraft gehört.“

“In moving a body through air, the particles of air in front of the body are pushed aside and forced to follow certain paths; the air behind the body being also set in motion.

If the body possesses a uniform velocity with regard to the air at rest, the motion of the air caused by the passage of the body through it will be uniform likewise and be mainly confined to opening out in front of the advancing body and joining up again in its rear. The air behind will partly share in the movement of the body, but besides certain regular eddying movements will be produced in it which persist for some time in the path described until by mutual friction they gradually subside.

These various movements must be imparted to the air which was initially at rest, and this accounts for the resistance opposed by the air to the movement of any object through it, a resistance which necessitates the expenditure of an equal force.”

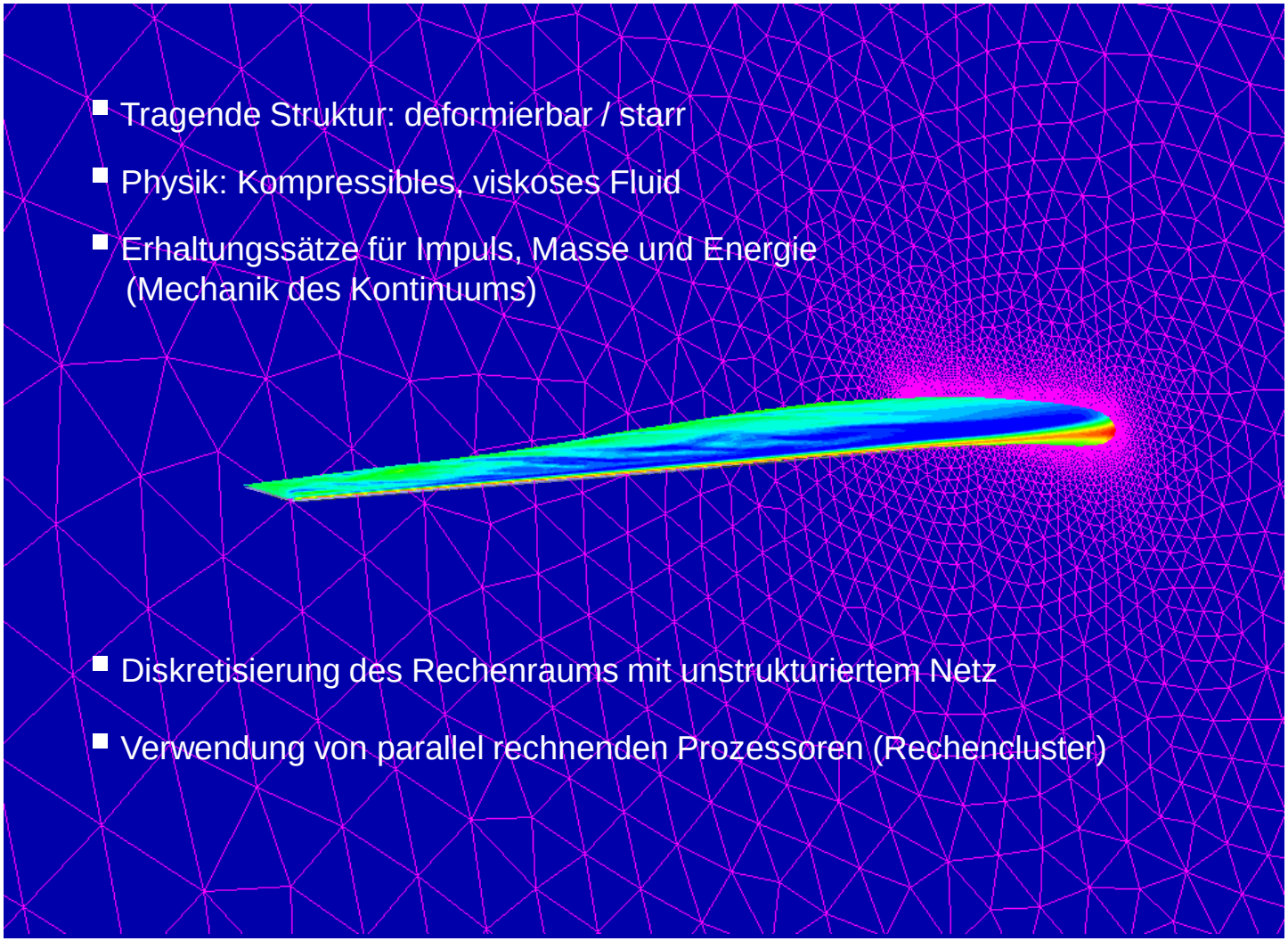
Otto Lilienthal, *Birdflight As The Basis Of Aviation*, transl. by A.W. Isenthal 1911

Auftriebskraft trägt mehr als 500 t.

Druckverteilung im Flug (blau: Unterdruck)

Beim Erstflug - Toulouse-Blagnac am 27.4. 2005

Foto: Airbus Industries

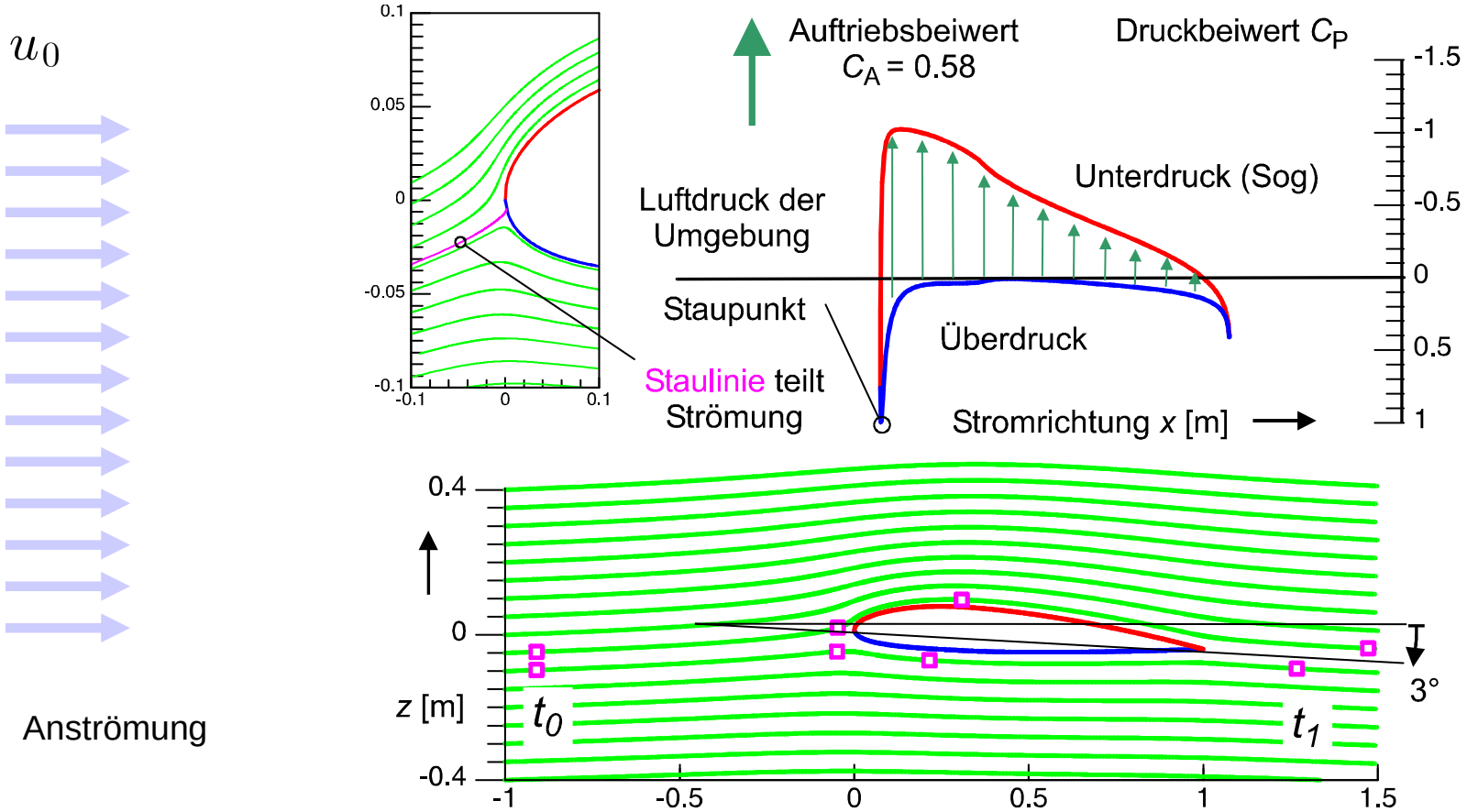


Quellen:
Netz von A. Šoda
- DLR Göttingen
Eigene Rechnung

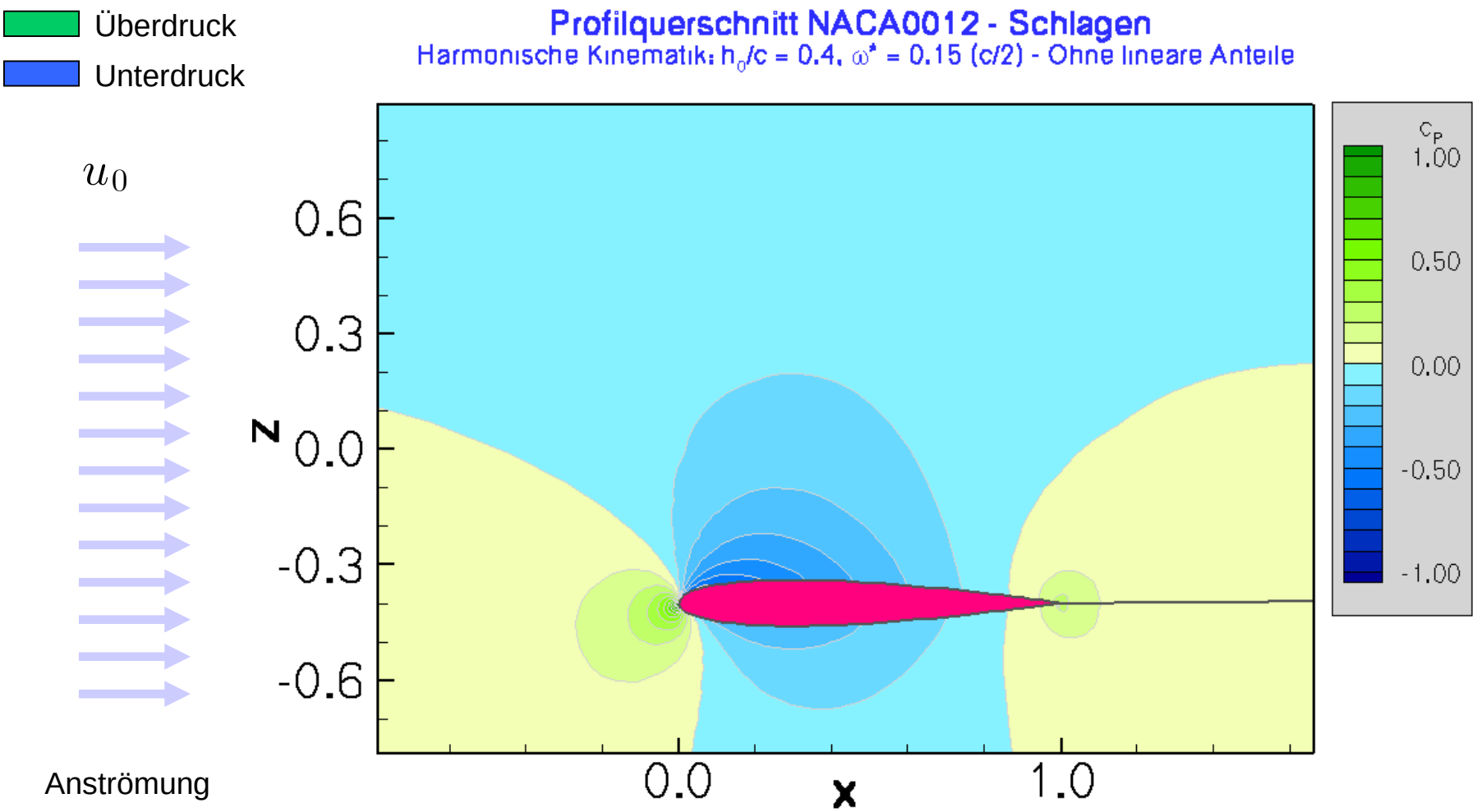
Lösung des Umströmungsproblems mit numerischen Verfahren
Tragflügel: *Pars pro toto*

Druckbeiwert: $c_P(x,z) = [p(x,z) - p_\infty] \,/\, (\frac{1}{2}\varrho_\infty \cdot u_0^2)$

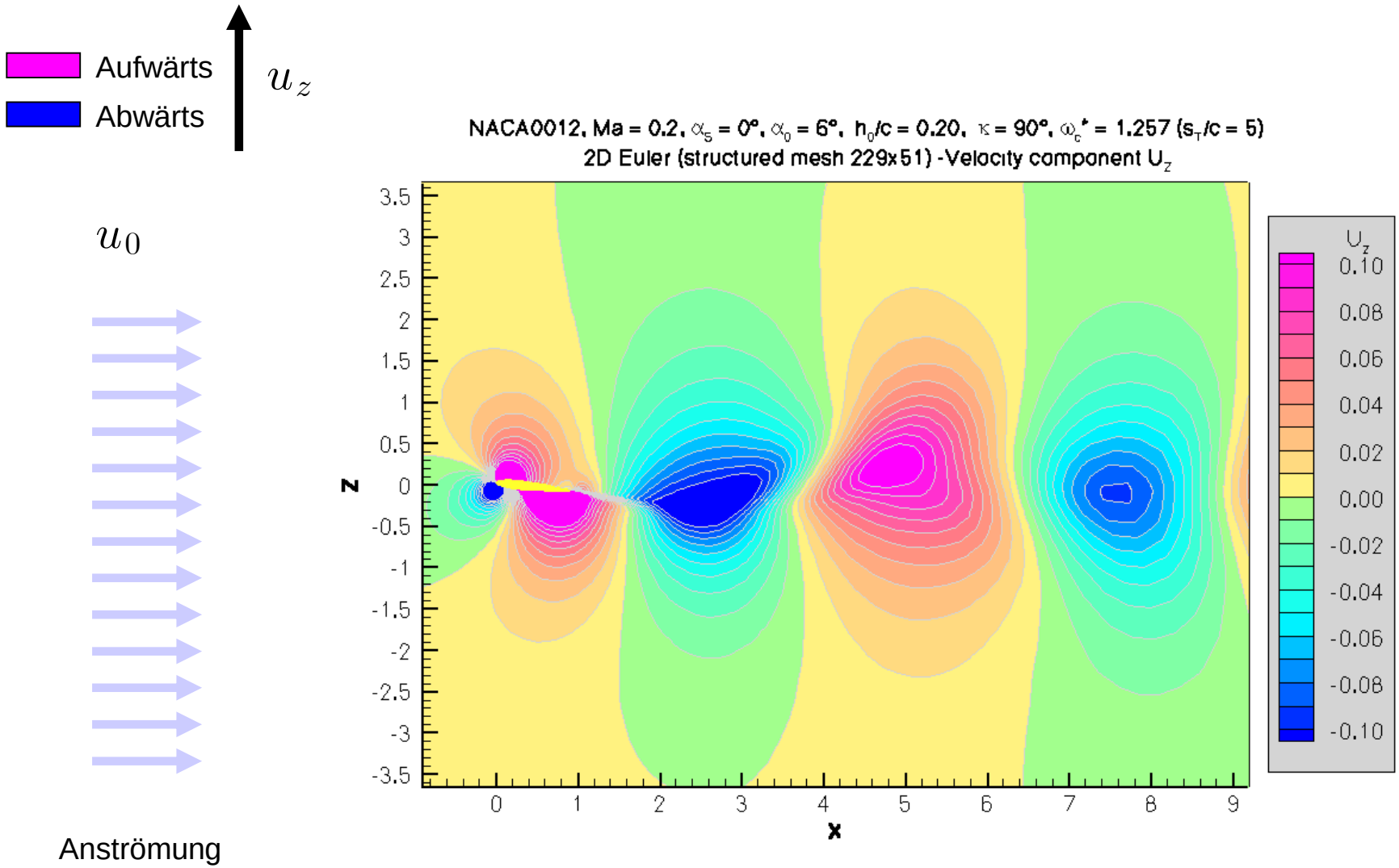
Index ∞ : Ruhegrößen des Fluids



Beispiel 1: Stationäre Druckverteilung *p(x,z)* um eine Tragfläche (2D)



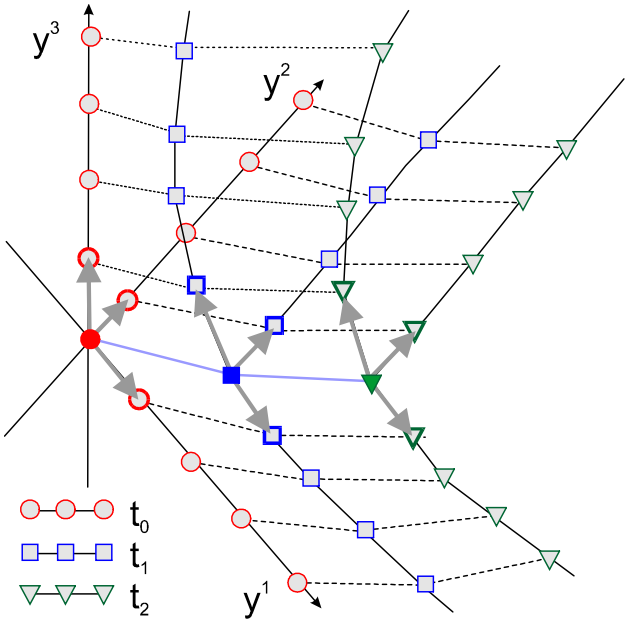
Beispiel 2: Druckverteilung um eine schwingende Tragfläche

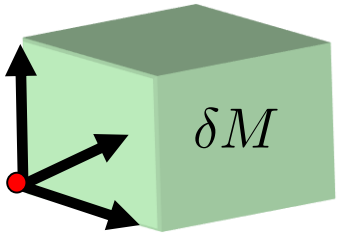


Beispiel 3: Geschwindigkeitsfeld hinter schwingender Tragfläche

Quelle: A. Schröder, DLR Göttingen

Beispiel 5: Drehende Randwirbel im Nachlauf eines Flugzeugs





3D Raumbereich parametrisiert mit (y^k)
Parametervolumen:

$$\delta Q = \delta y^1 \delta y^2 \delta y^3$$

$$x^i(y^k, t_0) = y^i$$

Massenelement über Dichtefunktion:

$$\delta M(y^k) = \varrho(y^k)\delta Q, \quad \varrho(x^k, t_0) = \varrho(y^k)$$

Erhaltung der Masse: $\left[\frac{\partial}{\partial t}\delta M\right]_{y^k} \equiv 0$ (Faktum! - nur Kinematik)

Raumfestes Bezugssystem:

$$B = \{o, \mathbf{e}_i\}$$

Koordinaten für Punkt *x*:

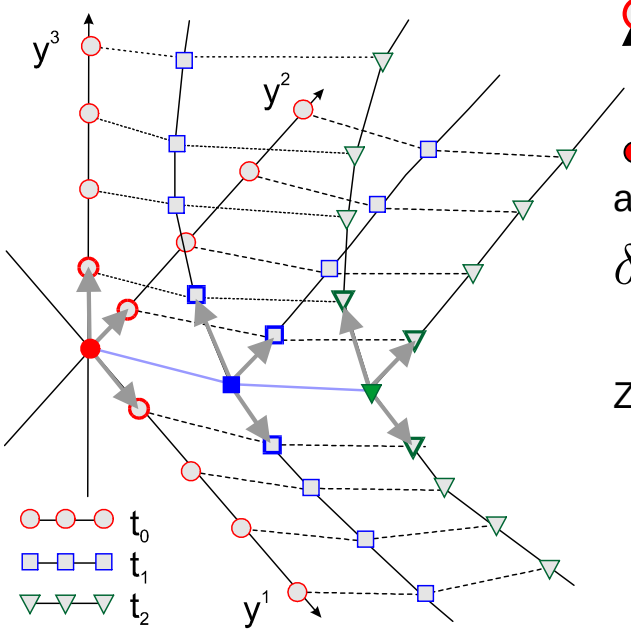
$$\overrightarrow{ox} = \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$$

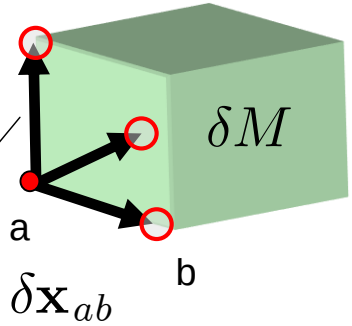
Geschwindigkeitsfeld **v** der Materie:
(Die von einem bewegten Körper *induzierte* Bewegung der Materie)

$$v^i_{ind}(x^k, t) := \left[\frac{\partial x^i}{\partial t}\right]_{y^k}$$

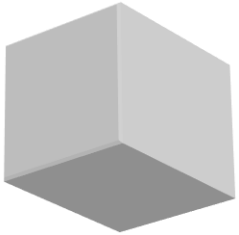
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{v}_{ind}(\mathbf{x}, t) = v^i_{ind}(x^k, t)\ \mathbf{e}_i$$

Notation für Strömungsfeld: Dichte und Geschwindigkeit

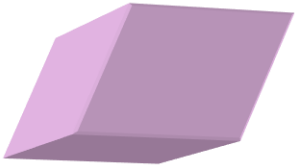




Isotrope Kompression θ



Formtreue Drehung ω



Volumen erhaltende*) Scherung σ

Zeitliche Änderung der Verbindung $\delta\mathbf{x}_{ab}$ zwischen zwei Partikeln a und b:

$$\left[\frac{\partial\ \delta\mathbf{x}_{ab}}{\partial t}\right]_{y^k} = \delta\mathbf{x}_{ab}\cdot grad\ \mathbf{v}$$

Eindeutige Zerlegung:

$$v_{|k}^{\ i} = \frac{\partial v_{ind}^{i}}{\partial x^k} = \frac{\theta}{3}\delta_k^{\ i} + \omega_k^{\ i} + \sigma_k^{\ i}$$

diagonal **schiefsymmetrisch** **symmetrisch**

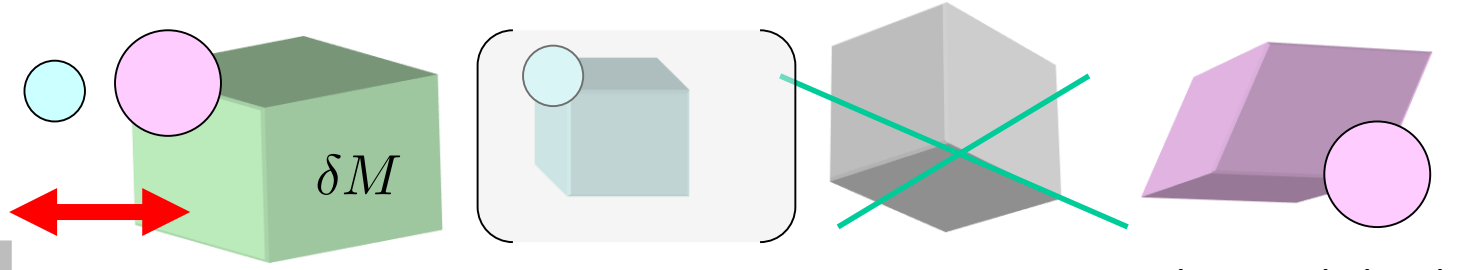
$$\left[\frac{\partial \delta x_{ab}^{\ i}}{\partial t}\right]_{y^l} = \delta x_{ab}^{k}\cdot\frac{\partial v_{ind}^{i}(x^j,t)}{\partial x^k}$$

Eigenschaften des Strömungsfeldes: Relativer Verbindungsvektor

Reibung

Wärmeleitung

$$\mathbf{q} = -\kappa \;\; gradT$$



Isotrope Kompression $\boldsymbol{\theta}$

Formtreue Drehung ω

Volumen erhaltende Scherung σ

Leistungsbilanz für Wärmeinhalt *q* eines Massenelements:

$$\rho \cdot \frac{dq}{dt} = -\, div \;\; \mathbf{q} + 2\eta \cdot \sigma^2 + \zeta \cdot \theta^2$$

η Scherviskosität – Bedeutende Rolle auch für die Übertragung von Impuls

ζ Druckviskosität – Untergeordnete Rolle und nur bei höheren Frequenzen wirksam

Materiekoordinaten:

$$\frac{dq(y^k,t)}{dt} := \left[\frac{\partial q(y^k,t)}{\partial t}\right]_{y^k}$$

Raumkoordinaten:

$$\frac{dg(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot grad \;\; g$$

$$\sigma^2 := \sigma_i{}^k \cdot \sigma_k{}^i$$

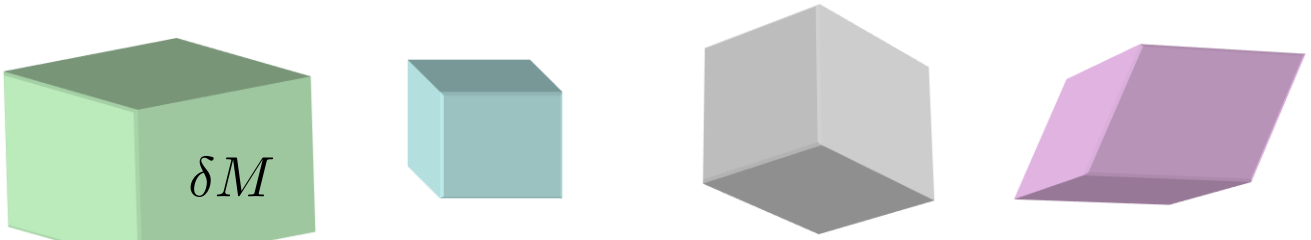
$$\theta^2 := \theta_i{}^k \cdot \theta_k{}^i$$

<u>Energiesatz:</u> Zeitliche Änderung des Wärmeinhalts eines Massenelements

Ideales Gas, Druck *p*:

$$p(\varrho, T) = \frac{R}{A_r}\varrho T$$

$R = 8.31 \cdot 10^3 JK^{-1}kg^{-1}$
$A_r = 28.96$



Isotrope Kompression θ

Formtreue Drehung ω

Volumen erhaltende Scherung σ

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

Adiabate Änderung für Energiesatz

→ Zustandsgleichung:

$$\varrho(p) = \varrho_\infty \cdot \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Der Impulssatz leitet sich ab aus den tangentialen und normalen mechanischen Spannungen, denen ein Massenelement durch die benachbarten Elemente ausgesetzt ist:

$$\varrho(p) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\, grad\ \ p + 2\eta\ \ grad^T \cdot \underline{\sigma} + \varrho(p) \cdot \mathbf{g} \left(+ \zeta \cdot grad^T\ \ \underline{\theta} \right)$$

$grad^T \cdot \underline{\sigma} = \partial\sigma^i{}_k / \partial x^k \cdot \mathbf{e}_i$ $\quad$ $\mathbf{g}$ Schwerefeld $\quad$ x_∞: Wert *x* im ungestörten Fluid

<u>Impulssatz</u> - Vereinfachung durch Annahme adiabater Zustandsänderung

Definitionsgemäß gilt: $grad^T \cdot \underline{\sigma} = \partial \sigma^i{}_k / \partial x^k \cdot \mathbf{e}_i = \frac{1}{2}\left[\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} grad(div\mathbf{v})\right]$

Annahmen:

- Ideales Gas
- Adiabate Zustandsänderung
- Beschleunigungen im Strömungsfeld groß gegen die Erdbeschleunigung
- Massenerhaltung im Volumenelement liefert Differentialgleichung für Druck

Impulserhaltung:

$$\varrho(p) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\, grad\ \ p + \eta\left[\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3}\ grad(div\mathbf{v})\right]$$

Massenerhaltung:

$$\frac{dp}{dt} = -\,\varrho(p)\ \ c_s^2(p) \cdot div\mathbf{v}$$

Energieerhaltung:

$$\varrho(p) = \varrho_\infty \cdot \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Isentrope Schallgeschwindigkeit:

$$c_s^2(p) = \gamma \cdot p / \varrho(p)$$

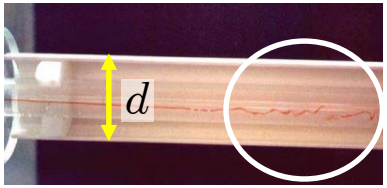
Inkompressible Strömung:

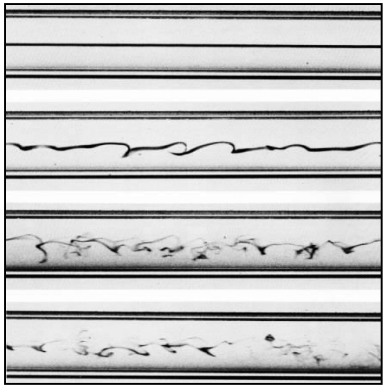
$$\theta = div\mathbf{v} = 0$$
$$\varrho(p) \cong \varrho_\infty$$

Erhaltungssätze für die klassische Aerodynamik (subsonisch)

Differentialgleichungen für Druck und Geschwindigkeit (neben anderen Formulierungen)

$v \longrightarrow$





$|\overline{v}|$

$$v = \overline{v} + v'$$

Umschlag der Strömung

$$Re = \frac{\overline{v} \cdot \varrho \cdot d}{\eta}$$

Reynoldszahl

Quellen: www.flometrics.com (o)
www.maths.bris.ac.uk/~mazyd (u)

Annahmen:

- Ideales Gas
- Keine weiteren Annahmen erforderlich (direkte Lösungen der Erhaltungssätze, die auch als Navier-Stokes-Gleichungen bezeichnet werden)
- Lösungen für die Variablen Geschwindigkeit , Dichte und Temperatur (z.B.)
- Erhaltungssätze für Impuls, Masse und Energie nur numerisch lösbar: Strömungslöser verfügbar (-> Computational Fluid Dynamics, CFD solver)

Probleme:

- Umschlag der Strömung von einer wohlgeschichteten (laminaren) zu einer lokal ungeordneten (turbulenten) Strömung (O. Reynolds 1883) ist unvermeidlich: **Naturerscheinung als Folge lokaler Instabilitäten**
- Turbulenz kann sich von kleinsten Störungen zu großräumiger Unordnung entwickeln: Großes Frequenzspektrum, bis heute numerisch direkt lösbar nur in kleinen Raumbereichen (zu klein z.B. für Tragflächen), Kennzahl *Re*
- Zerlegung der Turbulenz in Mittelwerte und Schwankungsgrößen möglich
- Turbulenzmodelle erforderlich für Einbindung der Schwankungsgrößen

Lösung des Umströmungsproblems für das kompressible, viskose Fluid
Kernproblem: Turbulenz

Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Jedes Vektorfeld (also auch das Geschwindigkeitsfeld ***v***(***x***,t) für die Fluidbewegung) kann dargestellt werden als Summe aus

- dem Gradient eines skalaren Potentials φ,
- der Rotation eines divergenzfreien Vektorpotentials ***A*** und
- einer Konstanten $\boldsymbol{v}_0$.

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \boxed{-\,grad\;\;\varphi(\vec{x},t)} + \boxed{rot\;\;\vec{A}(\vec{x},t)} + \vec{v}_0$$

$$\delta = div\;\;\vec{v} \qquad\qquad \vec{j} = rot\;\;\vec{v}$$

Quelldichte δ | Wirbeldichte ***j***

Die Physik des Impulssatzes impliziert:

Term beschreibt Kompressibilität | Term beschreibt Viskosität

Grundlagen der Vektoranalysis liefern Verständnis der Erhaltungssätze

Ansatz für das Geschwindigkeitsfeld mit skalarem Potential

Ansatz über Vektorpotential Wirbeldichte nahe liegend, aber historische Entwicklung entgegengesetzt verlaufen:

Impulssatz: $$\varrho_\infty \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\,grad\;\; p$$

Ansatz: $$\mathbf{v} = -\,grad\;\; \varphi$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + (\mathbf{v}\,grad)\mathbf{v}$$

1. Integral des Impulssatzes: $$\varrho_\infty \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot \mathbf{v}^2 \right] + p = f(t)$$

Stationäre Bernoulli Gleichung: $$\frac{1}{2}\varrho_\infty \cdot u_0^2 + p_\infty = \frac{1}{2}\varrho_\infty \cdot \mathbf{v}^2(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x})$$

f = konstant

Gleichung ordnet dem Geschwindigkeitsfeld den jeweiligen Druck zu.

Dimensionsloser
<u>Beiwert</u> für den Druck: $$c_P\left(\mathbf{x}\right) := \frac{p(\mathbf{x}) - p_\infty}{\frac{1}{2}\;\varrho_\infty \cdot u_0^2} = 1 - \left[\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{u_0}\right]^2$$

Das ideale Fluid ohne Reibung und Kompressibilität

Keine Kraft auf einen gleichförmig bewegten Körper

Laplace Gleichung: $\boxed{div\mathbf{v} = \triangle\varphi = 0}$

Im Ergebnis ergibt die Betrachtung den Energieinhalt des Fluids (*E* quadratische Form des Vektors $\mathbf{u}_0$):

$$E = \tfrac{1}{2}\varrho_\infty\left(4\pi\ \ \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_0 - V_0\cdot\mathbf{u}_0^2\right)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_0^T\cdot\underline{c},\quad \underline{c} = ((c_k{}^i)) \qquad \Rightarrow$$

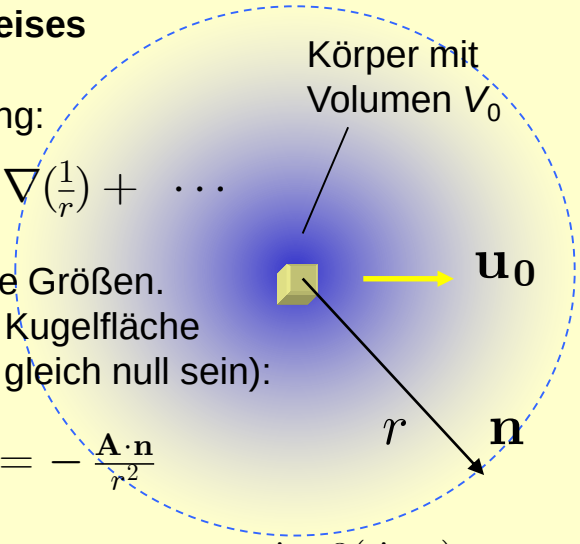
$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}\ \mathbf{u}_0^T\cdot\underline{M}\cdot\mathbf{u_0}} \qquad \underline{M} = ((m_i{}^k))$$

Daher lautet der Impuls im Fluid: $\boxed{\mathbf{P} = \underline{M}\cdot\mathbf{u}_0}$

Reaktionskraft **F** des Fluids auf den Körper:

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0}$$

Skizze des Beweises



Allgemeine Lösung:

$$\varphi = -\tfrac{a}{r} + \mathbf{A}\cdot\nabla\left(\tfrac{1}{r}\right) + \quad\cdots$$

a und **A** konstante Größen.
Fluidstrom durch Kugelfläche betrachtet (muss gleich null sein):

$$\Rightarrow\quad a = 0,\quad \varphi = -\tfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}}{r^2}$$

$$\mathbf{v} = -\left(\mathbf{A}\cdot\nabla\right)\nabla\left(\tfrac{1}{r}\right) = \frac{\mathbf{A}-3(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}}{r^3}$$

Auf der Oberfläche des Körpers müssen die beiden Geschwindigkeiten **v** und $\mathbf{u}_0$ gleich sein.

$$E = \tfrac{1}{2}\varrho_\infty\iiint\limits_{Vol}\mathbf{v}^2\cdot dV$$

Grenzübergang mit Körper im Innern

(Überlegung mit einigen Zwischenschritten!)

Quelle: L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI, Hydrodynamik, Berlin 1971, §11

Das ideale Fluid ohne Reibung und Kompressibilität

$$div\mathbf{v} = \triangle\varphi = 0$$

Lösung (im körperfesten Bezugssystem):

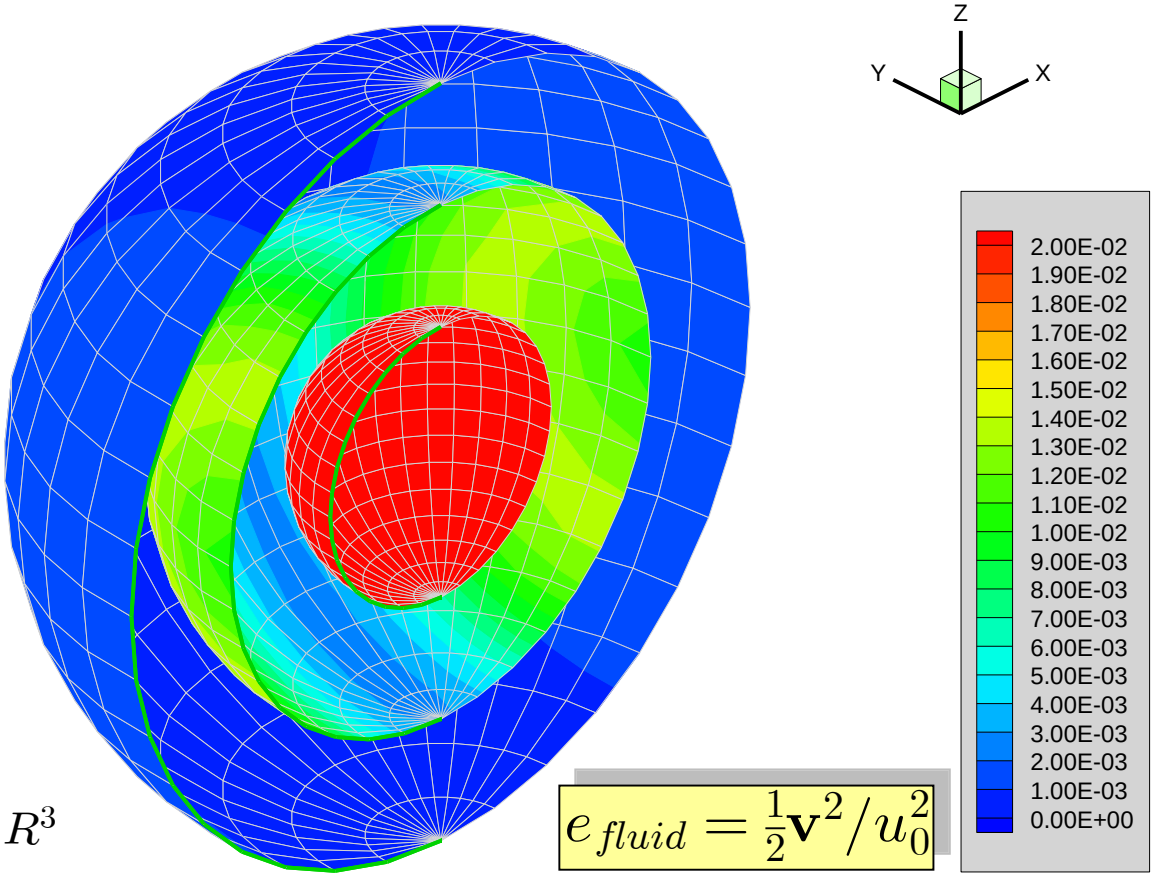
$$u(\mathbf{x}) = u_0\left[1 + \frac{R^3}{2r^5}\cdot(r^2 - 3x^2)\right]$$
$$v(\mathbf{x}) = -\,u_0\cdot\frac{3R^3}{2r^5}\cdot xy$$
$$w(\mathbf{x}) = -\,u_0\cdot\frac{3R^3}{2r^5}\cdot xz$$

$$\mathbf{v} = -\,(\mathbf{A}\cdot\nabla)\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mathbf{A} - 3(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}}{r^3}$$

$$(A^i) = (u_0\,R^3/2, 0, 0) \qquad \mathbf{n} = \mathbf{x}/r$$

Gesamte Energie im Fluid:

$$E = \frac{1}{2}\varrho_\infty\left(4\pi\ \ \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_0 - V_0\cdot\mathbf{u}_0^2\right) \quad V_0 = \frac{4\pi}{3}R^3$$



$$e_{fluid} = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2/u_0^2$$

$$E_{fluid} = \frac{1}{4}\varrho_\infty V_0\cdot u_0^2$$

Gesamte Energie im Fluid ist halb so groß wie die kinetische Energie der bewegten Kugel, wenn diese die gleiche Dichte hat wie das Fluid.

Umströmung einer Kugel: Energieinhalt des Fluids

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} div\ \ \mathbf{v} &= 0 \\ rot\ \ \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}}$$

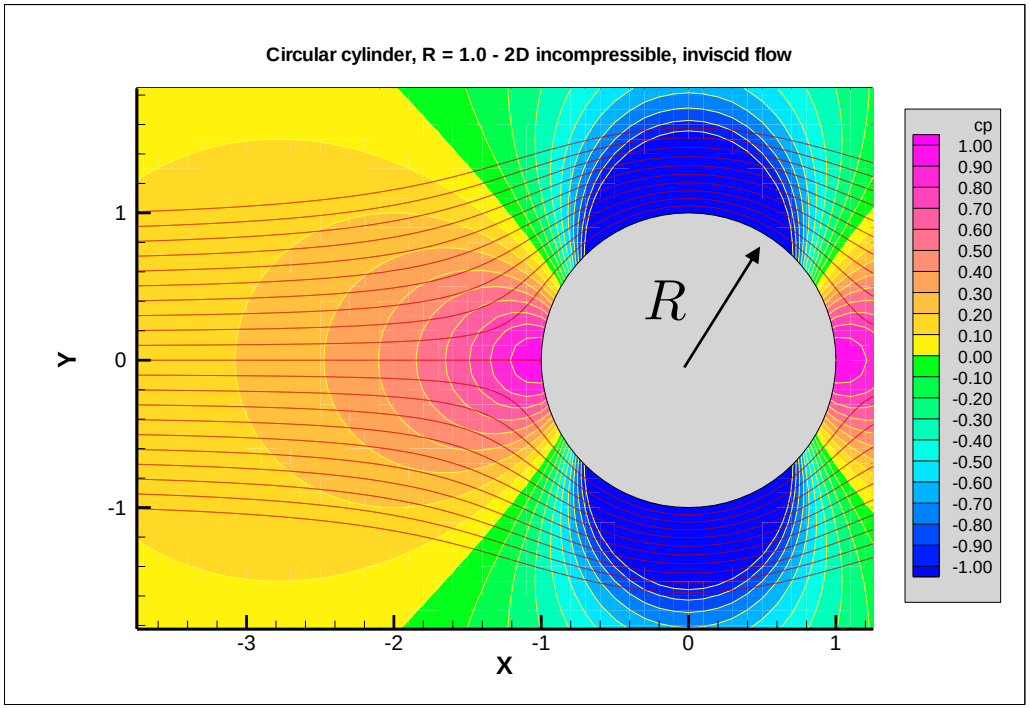
2D Hilfsmittel: Funktionentheorie, konforme Abbildung
Potential- und Stromfunktion

$$f(z) = f(x+iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

Führt auf die Cauchy-Riemann Differentialgl.

Lösung:

$$u(x,y)/u_0 = 1 + R^2(y^2 - x^2)/(x^2+y^2)^2$$
$$v(x,y)/u_0 = -\,2R^2xy/(x^2+y^2)^2$$



Exakte Lösung? – Nicht im physikalischen Sinn: Dazu Massenerhaltung „von links nach rechts“ ausgewertet.

Massenerhaltung: $\boxed{\frac{dp}{dt} = -\,\varrho(p)\ \ c_s^2(p)\cdot div\mathbf{v}}$ **+** Impulssatz: $\boxed{c_P(\mathbf{x}) := \frac{p(\mathbf{x})-p_\infty}{\frac{1}{2}\varrho_\infty \cdot u_0^2} = 1 - \left[\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{u_0}\right]^2}$

Stationär: $div\ \ \mathbf{v} = \theta = -\frac{1}{2}Ma^2\ \left[u(x,y)\cdot\frac{\partial c_p(x,y)}{\partial x} + v(x,y)\cdot\frac{\partial c_p(x,y)}{\partial y}\right]$ = 0?

$Ma = u_0/c_s$
Ma Machzahl

Bekanntes Beispiel: Strömung um Kreiszylinder

$$\mathbf{v}(r,\phi) = \begin{bmatrix} u(r,\phi) \\ v(r,\phi) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} div\ \ \mathbf{v} &= 0 \\ rot\ \ \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}}$$

Lösung:

$$u(r,\phi)/u_0 = 1 - cos(2\phi)/r^2 \qquad x = rRcos\phi$$
$$v(r,\phi)/u_0 = -\ sin(2\phi)/r^2 \qquad y = rRsin\phi$$

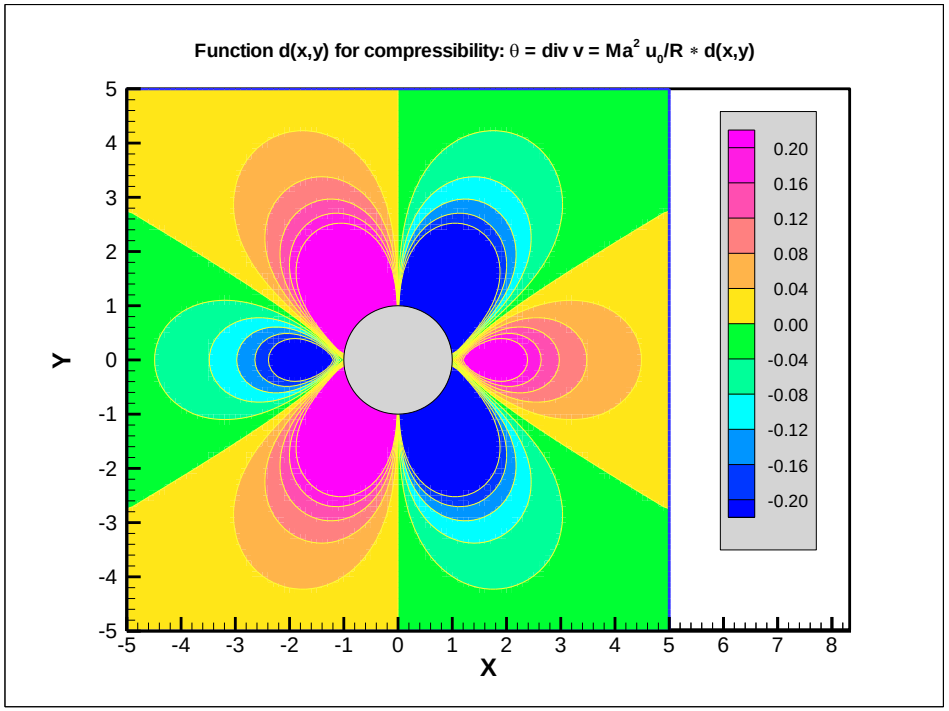
Druckänderung stationär (Massenerhaltung):

$$\theta = -\tfrac{1}{2}Ma^2\ \ \mathbf{v}\cdot grad\ \ c_P(x,y)$$

$$\boxed{\theta(r,\phi) = Ma^2 \cdot \frac{u_0}{R} \cdot d(r,\phi)} \qquad Ma = u_0/c_s$$

$$d(r,\phi) = 2cos\phi \cdot \left(\frac{4cos^2\phi - 3}{r^3} - \frac{2}{r^5} + \frac{1}{r^7}\right)$$

Folgerung: Unter Einbeziehung der Erhaltungs-sätze erweisen sich die exakten Lösungen als Approximationen.



Ebenso Beitrag zur Viskosität im Energiesatz:

$$\boxed{\sigma^2(r,\phi) = \frac{u_0^2}{R^2} \cdot \left[\frac{8}{r^6} + \frac{2}{9}Ma^4 \cdot d^2(r,\phi)\right]}$$

$$\rho \cdot \frac{dq}{dt} = 2\eta \cdot \sigma^2 \quad > 0$$

Näherung der Erhaltungssätze: Eine wenig bekannte Betrachtung

- Das ideale Fluid vermag keine Kraft auf einen gleichförmig bewegten Körper auszuüben.
- Vor der Hintergrund der Erhaltungssätze gibt es das ideale Fluid nicht. Die Lösungen der Potentialtheorie sind nur im ersten Schritt der Erfüllung der Laplace Gleichung $\triangle\varphi = 0$ exakt.
- Die Erhaltungssätze liefert auch mit der einfachsten Annahme einer adiabaten Zustandsänderung bei rekursivem Einsetzen der Lösung Kompressibilität und Dissipation durch Viskosität.
- Für das ideale Fluid lautet daher die zentrale Frage:

Wieso erfährt ein gleichförmig in Luft bewegter Körper eine Reaktionskraft?

Nach Komponenten aufgeteilt: Woher kommen Auftrieb und Widerstand?

- Die einfache Antwort:

Luft ist kein ideales Fluid. Für die Beschreibung des Fliegens darf Luft auch nicht näherungsweise als ideales Fluid beschrieben werden.

Zwischenbilanz: Feststellungen und Fragen

Luft ist kein ideales Fluid. Für die Beschreibung des Fliegens darf Luft auch nicht näherungsweise als ideales Fluid beschrieben werden.

Impulssatz und Massenerhaltung stationär:

$$\varrho_\infty \mathbf{v} \cdot grad\mathbf{v} = -\,grad\ \ p + \eta \Delta \mathbf{v}$$
$$div\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Prandtls Grenzschichtgleichungen beschreiben die Strömung in direkter Nähe einer Oberfläche:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho_\infty}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho_\infty}\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad ; \quad u\Big|_{y=0} = 0$$

- Impulstransport (Diffusion) nur quer zur Oberfläche
- Druck durch die Grenzschicht hindurch konstant
- Fluid haftet an der Oberfläche ($\mathbf{v} = 0$)
- „Außerhalb“ der Grenzschicht ungestörte Strömung

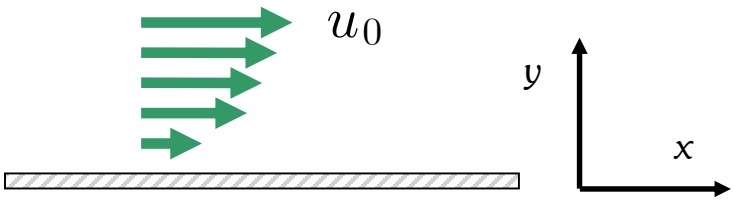
Der epochale Schritt für die richtige Ermittlung des Widerstands geht auf Ludwig Prandtl zurück.
1904 auf dem III. Internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg hielt er einen Vortrag mit dem Titel:

Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung

Reibung, d.h. Widerstand, durch Schubspannung an der Oberfläche:

$$\sigma_0 = \eta \cdot \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]_{|y=0}$$

Grenzschicht oberhalb einer angeströmten Oberfläche:



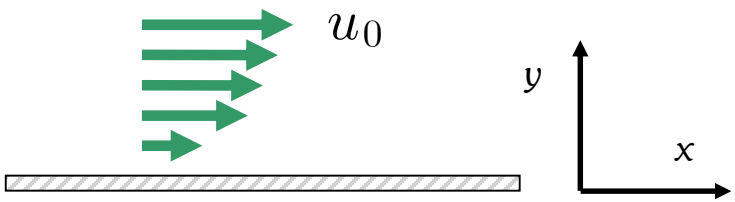
Die Ermittlung des Widerstands: Prandtls Grenzschichttheorie

Prandtls Grenzschichtgleichungen beschreiben die Strömung in direkter Nähe einer Oberfläche:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho_\infty}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho_\infty}\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad ; \quad u\Big|_{y=0} = 0$$

<u>Grenzschicht</u> oberhalb einer angeströmten Oberfläche:



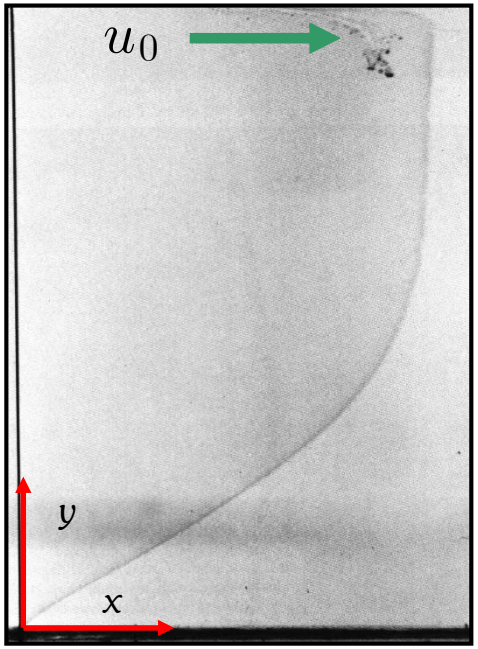
Ansatz für $u(x,y)$ führt auf die Reynoldszahl Re:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x,y) = f'(\zeta)\cdot u_0 & ; \quad \zeta = y/\ell \cdot \sqrt{Re/\xi} \\ \xi = x/\ell & \quad\;\; Re = u_0\varrho_\infty \ell/\eta \end{array}}$$

Erste Lösung von H. Blasius (1908) für die ebene, angeströmte Platte. Mit dem nebenstehenden Ansatz ergibt sich die folgende Differentialgleichung:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(\zeta)\cdot f''(\zeta) + 2f'''(\zeta) = 0 \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\zeta)_{|\zeta=\infty} = 1 \end{array}}$$

Problem der angepassten asymptotischen Entwicklung.



Glänzende experimentelle Bestätigung der identisch verlaufenden theoretischen Kurve für $u(x,y)$, erstmals von J. Nikuradse (1942) gemessen.

Quelle: M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion,* 1982. Bild 30. F.X. Wortmann (1977) Technik: Tellur-Draht durch elektrischen Impuls stimuliert in Wasser bei 9 cm/s. *Re*=500

Die Ermittlung des Widerstands: Prandtls Grenzschichttheorie

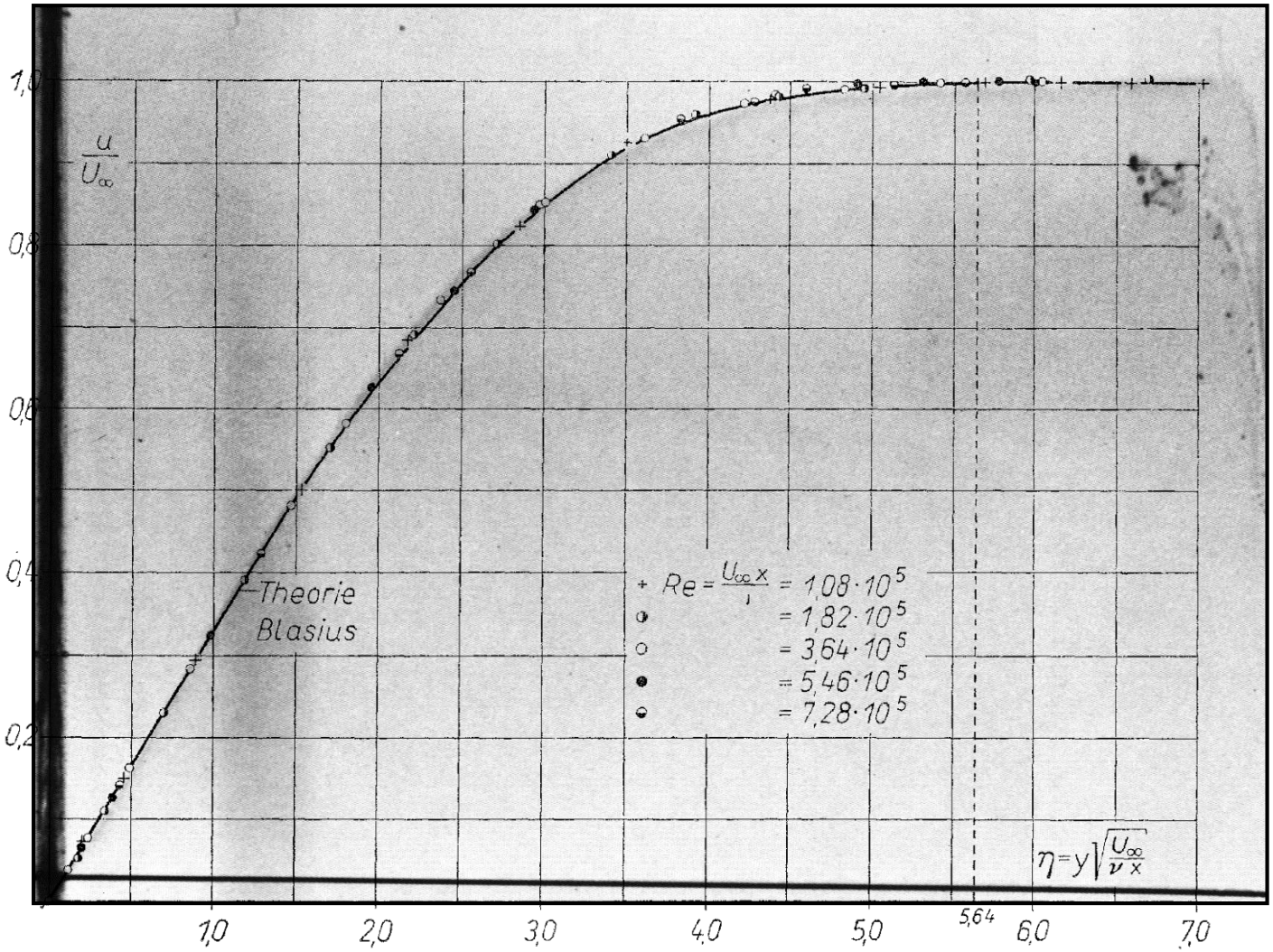
Bild des Experimentes gedreht und gespiegelt.

Geschwindigkeit der laminaren Grenzschicht an der ebenen Platte nach Messungen von J. Nikuradse (1942). Vergleich mit der Lösung von Blasius.

Quelle Bild: M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion,* 1982. Bild 30. F.X. Wortmann (1977) Technik: Tellur-Draht durch elektrischen Impuls stimuliert in Wasser bei 9 cm/s. *Re*=500

Quelle Grafik: H. Schlichting, *Grenzschichttheorie*, 1958.

Hinweis: Die Variable η entspricht ζ in der vorhergehenden Darstellung.



Prandtls Grenzschichttheorie: Bestätigung der Lösung von Blasius

- Historisch hat der Ansatz über das skalare Potential und die Laplace Gleichung $\triangle\varphi = 0$ gleichwohl eine außerordentliche Bedeutung erfahren.

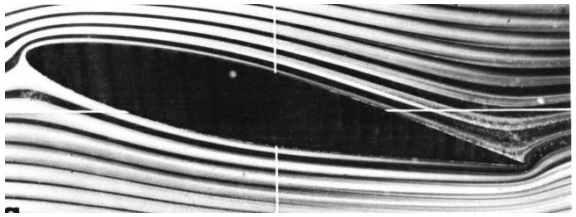
- In der Funktionentheorie wird die Beschreibung einer Umströmung mit Auftrieb erreicht durch das Hilfsmittel **Konforme Abbildung**. Überlagerung von Translations- und Zirkulationsströmung: nur 2D. Beobachtung des glatten Abflusses an der Hinterkante liefert Bedingung für Größe der Zirkulation im mathematischen Modell. Abflussbedingung nach W. Kutta (1902).

- Generell wird die Umströmung mit Auftrieb durch die Einführung von Trennflächen im Fluid erreicht. Längs der Trennflächen werden Hilfsfunktionen definiert, deren Wert über die **Lösung singulärer Integralgleichungen** bestimmt wird. Bedeutende erste Arbeit von H. Söhngen, Math. Z. Bd 45 (1939):

Die Lösungen der Integralgleichung

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-a}^{a} \frac{f(\xi)}{x-\xi}\, d\xi$$

und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie.



Auftriebslose Strömung um Profil

Quelle: M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion,* 1982.

Die Ermittlung des Auftriebs (I)

Der zweite Weg, den der Fundamentalsatz der Vektoranalysis anbietet:

$$\vec{j} = rot\ \ \vec{v}$$

Wirbeldichte ***j***

$$\vec{v}(\vec{x},t) = -\ grad\ \ \varphi(\vec{x},t) + rot\ \ \vec{A}(\vec{x},t) + \vec{v}_0 \qquad div\ \ \vec{A} = 0$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int\int\int \frac{\vec{j}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \cdot dV'$$

$$\delta = div\ \ \vec{v}$$

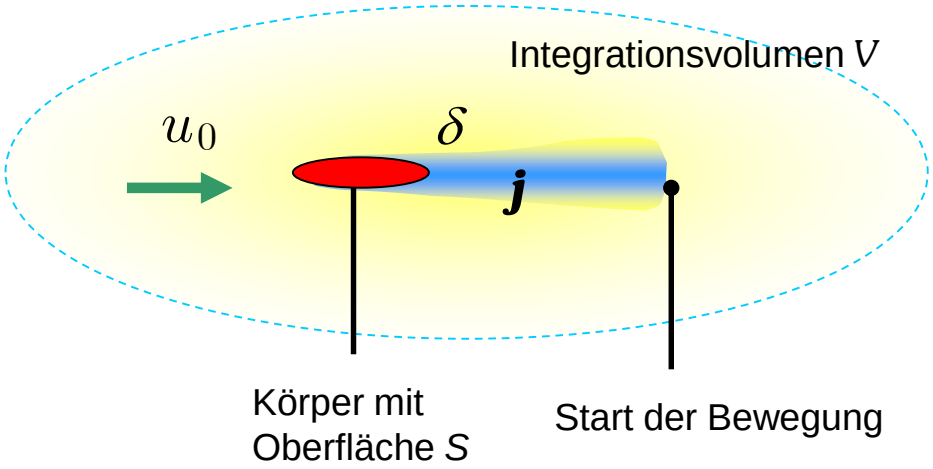
Quelldichte δ

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{Vol}\int\int \left[\vec{j}(\vec{x}',t) \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} + \delta(\vec{x}',t) \cdot \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right] dV'$$

- Vom bewegten Körper aus wird die Bewegung der Partikel durch <u>das relative Geschwindigkeitsfeld</u> $\boldsymbol{v}_{rel}$ beschrieben.

- <u>Das kinematische Geschwindigkeitsfeld</u> $\boldsymbol{v}_{kin}$ beschreibt die scheinbare Bewegung der Partikel, wie sie im körperfesten Bezugssystem wegen der kinematischen Eigenbewegung gesehen wird.

$$\mathbf{v}_{rel}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{x},t) + \mathbf{v}_{kin}(\mathbf{x},t)$$

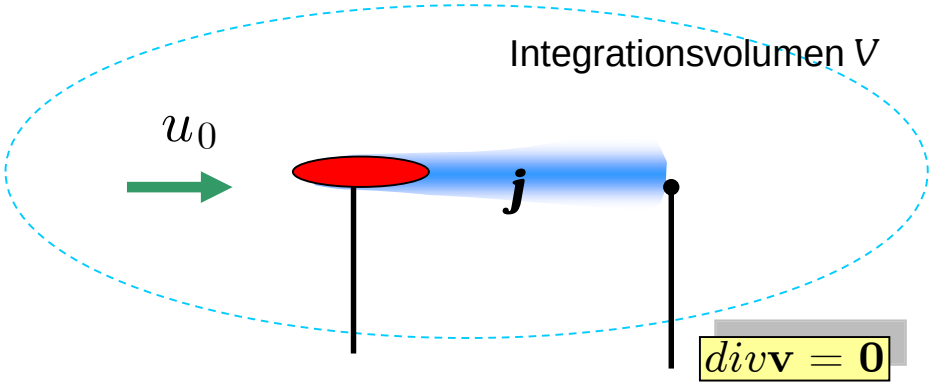


Die Ermittlung des Auftriebs (II) – Verwendung der Wirbeldichte

Impulssatz in inkompressibler Strömung:

$$\varrho_\infty \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\,grad\;\; p + \eta\;\; \Delta\mathbf{v}$$

$$\boxed{\mathbf{j} = rot\mathbf{v}}$$



ergibt <u>Wirbeltransportgleichung</u>:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot grad\mathbf{v} + \frac{\eta}{\varrho_\infty}\Delta\mathbf{j}}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j} + (\mathbf{v}grad)\mathbf{j}$$

mit Geschwindigkeitsfeld aus **j**:

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi}\cdot \int\limits_{Vol}\int\int \mathbf{j}(\mathbf{x}',t)\times\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\;\; dV'}$$

Geschwindigkeitsfeld der Relativbewegung: $\mathbf{v}_{rel}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{x},t) + \mathbf{v}_{kin}(\mathbf{x},t)$

<u>Randbedingung</u> für viskose Strömung:

$$\boxed{\mathbf{v}_{rel}(\mathbf{x_S},t) = 0 \quad \vee\, \mathbf{x}_S \in S}$$

Die Wirbeltransportgleichung mit der Randbedingung für das Verschwinden des relativen Geschwindigkeitsfeldes auf dem Rand des umströmten Körpers ergibt eine nicht-lineare Integro-Differentialgleichung.

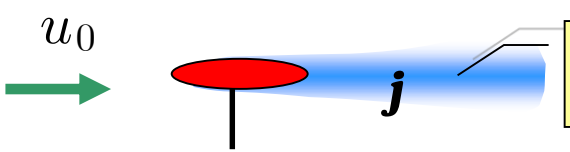
Integro-Differentialgleichung zur Lösung des Umströmungsproblems

$$\frac{d}{dt}\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot grad\mathbf{v} + \frac{\eta}{\varrho_\infty}\Delta\mathbf{j}$$

Entdimensionierung zeigt Einfluss der *Re* Zahl:

$$\frac{1}{\ell\cdot u_0}\frac{d}{dt}\mathbf{j} = \frac{1}{\ell\cdot u_0}\mathbf{j}\cdot grad\mathbf{v} + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{j}$$

Impulstransport umgekehrt proportional zur Reynolds-zahl. Typisch für Luftfahrzeuge: $Re = 10^6$ bis 10^8 !



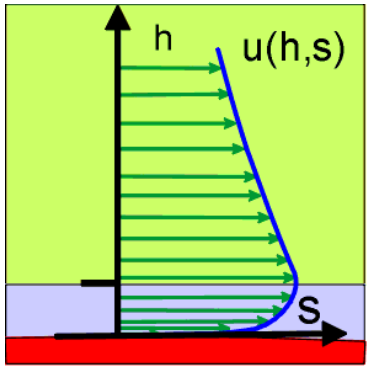
Der so genannte Nachlauf

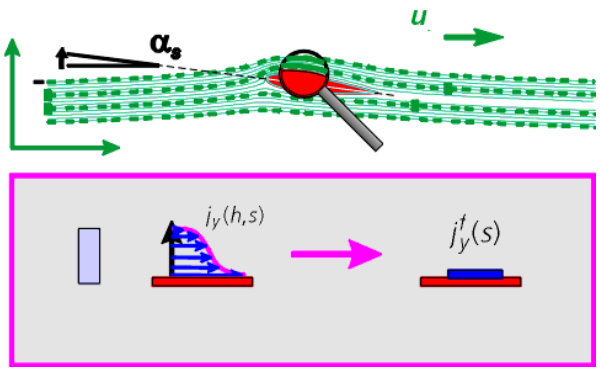
Körper mit Oberfläche *S*

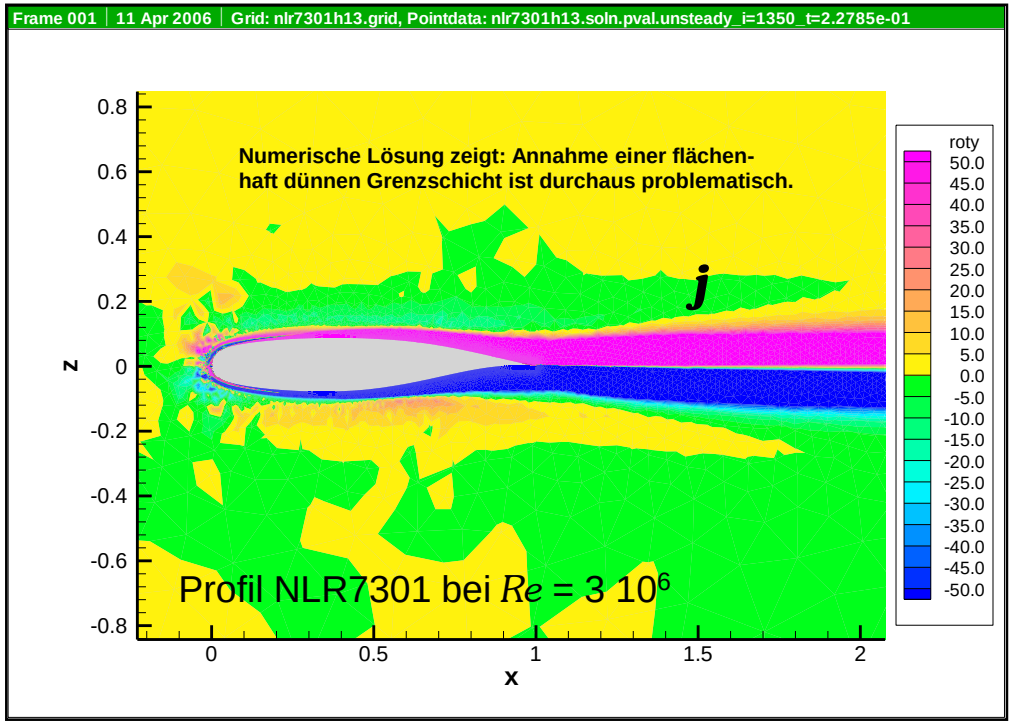
Konzept: Statt räumlicher Wirbeldichte längs der Oberfläche eine flächenhaft dünne Schicht mit gleicher Stärke. Grenzfall $Re \to \infty$

Randbedingung: Nur Normalkomponente = 0

$$\mathbf{v}_{rel}(\mathbf{x_S}, t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x_S}) = 0 \quad \vee\, \mathbf{x}_S \in S$$







Approximation der Wirbeltransportgleichung: Die infinitesimal dünne Grenzschicht

$$\frac{1}{\ell \cdot u_0}\frac{d}{dt}\mathbf{j} = \frac{1}{\ell \cdot u_0}\mathbf{j}\cdot grad\mathbf{v} + \frac{1}{Re}\Delta\mathbf{j}$$

Gleichung für flächenhafte Wirbeldichte, formuliert im mitbewegten Bezugssystem:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}^f + \mathbf{v}_{rel}\cdot grad\mathbf{j}^f = \mathbf{j}^f\cdot grad\mathbf{v}_{rel}$$

Approximation der Relativgeschwindigkeit:

$$\mathbf{v}_{rel}(\mathbf{x},t) \cong (u_0,\ \ 0,\ \ 0)^T \qquad \left|\mathbf{v}_{ind}\right| \ll u_0$$

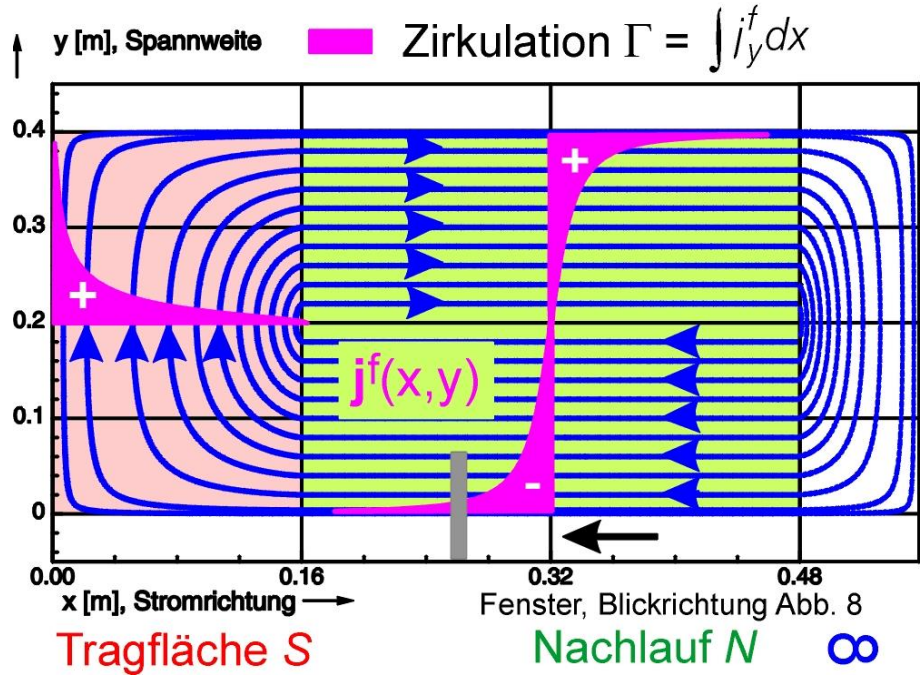
Flächenhafte Wirbeldichte auf $F = S \cup N$, d.h. auf Der Oberfläche S des Körpers und im Nachlauf N:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}^f(\mathbf{x}_F,t) + u_0\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{j}^f(\mathbf{x}_F,t) = 0}$$

Lösung der – nunmehr linearen – Integralgleichung über Ansatzfunktionen liefert als Ergebnis:

- Tangentiale Umströmung der Oberfläche.
- Stetiger Abfluss der Wirbeldichte in den Nachlauf.

- Der Grenzfall $Re \to \infty$ beschreibt noch die Forderungen der Impulserhaltung richtig, aber er liefert keine Schubspannung mehr, also keinen Reibungswiderstand.
- Man erinnere sich: In Prandtls Grenzschicht ist eine wichtige Annahme die Konstanz des Drucks durch die Grenzschicht hindurch. Deshalb ergibt auch die flächenhaft dünne Schicht von Wirbeldichte den richtigen Druck.



Berechnung der flächenhaften Wirbeldichte auf umströmten Körpern

Zentrale Frage: Wieso kann man den Druck berechnen, wenn man nur das Geschwindigkeitsfeld kennt? Der Impulsatz lässt sich doch nur für ein skalares Potential integrieren.

Antwort: Der Weg zum Druck über ein skalares Potential ist in der Tat unvermeidlich. Die Näherung der infinitesimal dünnen Grenzschicht liefert die Lösung:

Das Ampéresche Theorem

Das Geschwindigkeitsfeld im Außenraum einer Schicht flächenhafter Wirbeldichte $\mathbf{j}_F$ wird dargestellt durch die Rotation des zugehörigen Vektorpotentials, in dem $\mathbf{j}_F$ als Funktion auftritt.

Das gleiche Geschwindigkeitsfeld kann aber auch durch ein ganz spezielles skalares Potential dargestellt werden, nämlich durch das Dipolpotential derjenigen Dipolschicht σ, die über die Beziehung

$$grad\ \ \sigma \times \vec{n}_S = \vec{j}_F$$

mit der flächenhaften Wirbeldichte $\mathbf{j}_F$ zusammenhängt. $\boldsymbol{n}_S$ ist der örtliche Normalenvektor der Fläche.

$$\Phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int\limits_S\!\!\int \sigma(\vec{x}',t) \cdot \frac{\vec{n}_S{}'(\vec{x}')\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \cdot dS'$$

$$\boxed{\vec{v}(\vec{x},t) = -\ grad\ \ \Phi(\vec{x},t) = rot\ \ \vec{A}_F(\vec{x},t)}$$

Berechnung des Druck aus der flächenhaften Wirbeldichte (I)

$$\vec{v}(\vec{x},t) = -\,grad\ \ \Phi(\vec{x},t) = rot\ \ \vec{A}_F(\vec{x},t)$$

Das Ampéresche Theorem ist der Schlüssel zu einem physikalischen Verständnis der Lösungen der klassischen Aerodynamik.

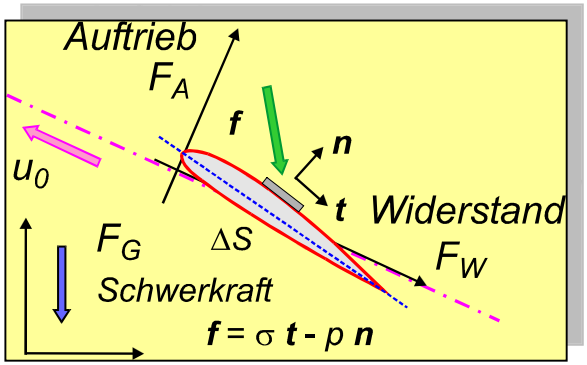
- Erst Trennflächen ermöglichen im idealen Fluid, dass ein gleichförmig bewegter Körper eine Kraft erfährt.
- Die flächenhafte Wirbeldichte im Nachlauf eines umströmten Körpers ist eine solche Trennfläche.
- Die Nachlauf hinter einem umströmten Körper ist gekennzeichnet durch den Impulsverlust als Folge der Reibung. Die flächenhafte Wirbeldichte liefert diesen Impulsverlust nicht: <u>Kein Reibungswiderstand</u>
- Die Näherung der endlich dicken Grenzschicht in einem viskosen Fluid durch eine flächenhaft dünne Schicht von Wirbeldichte hat eine gute physikalische Begründung im Grenzfall großer Reynoldszahlen. Die Näherung liefert aber die Druckverteilung auf der Oberfläche des Körpers: <u>Auftriebskraft.</u>
- Die Näherungen der Wirbeltransportgleichung zeigen, welche physikalischen Vereinfachungen der Annahme von solchen Trennflächen tatsächlich zugrunde liegen.
- Die Gleichwertigkeit der Ergebnisse (in einfachen Fällen) bei numerischer Lösung der Navier-Stokes Gleichung und den Integralverfahren der Wirbeltransportgleichung fördert das physikalische Verständnis.

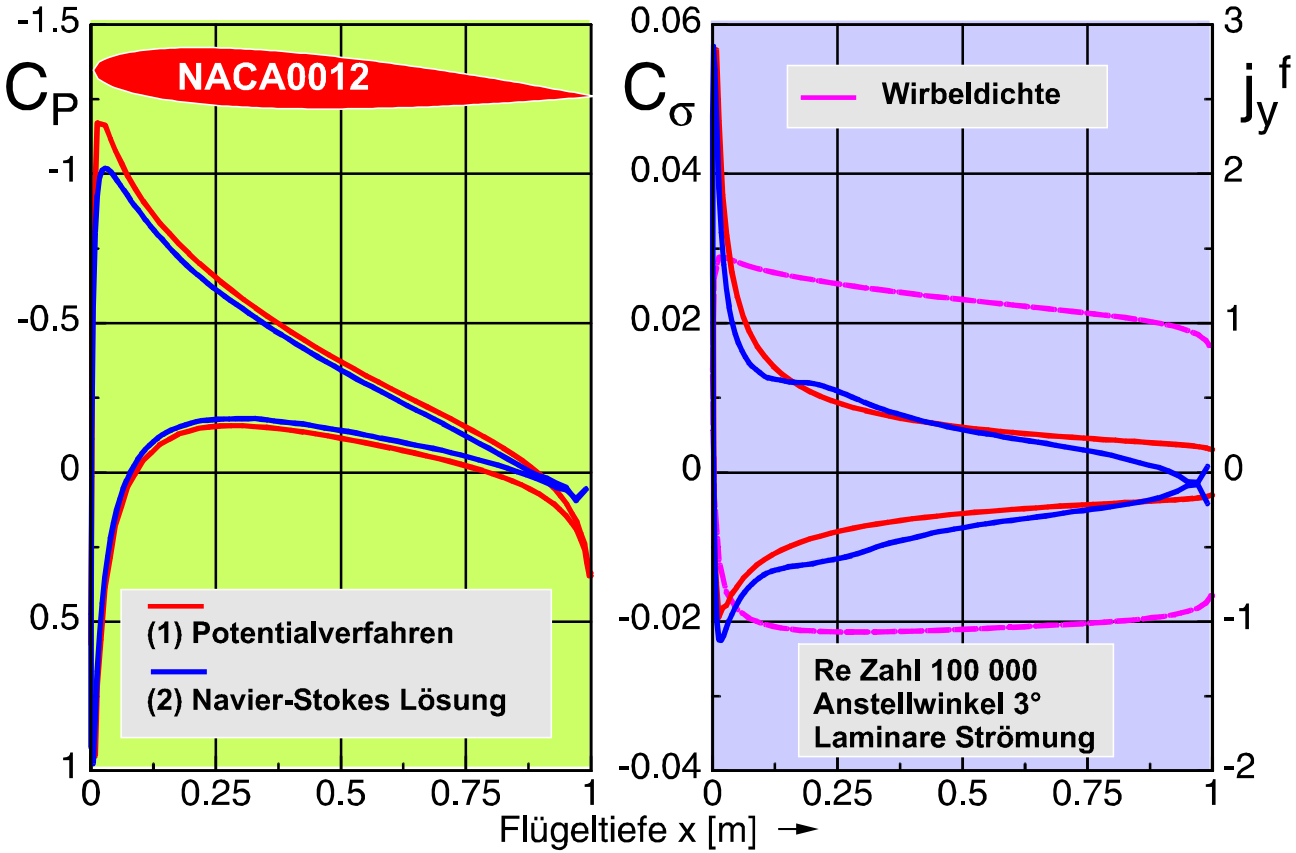
Berechnung des Drucks aus der flächenhaften Wirbeldichte (II)

Definition der Beiwerte für Druck p und Schubspannung σ:

$$c_P\left(\mathbf{x}_S\right) := \frac{p(\mathbf{x}_S) - p_\infty}{\frac{1}{2}\,\varrho_\infty \cdot u_0^2}$$

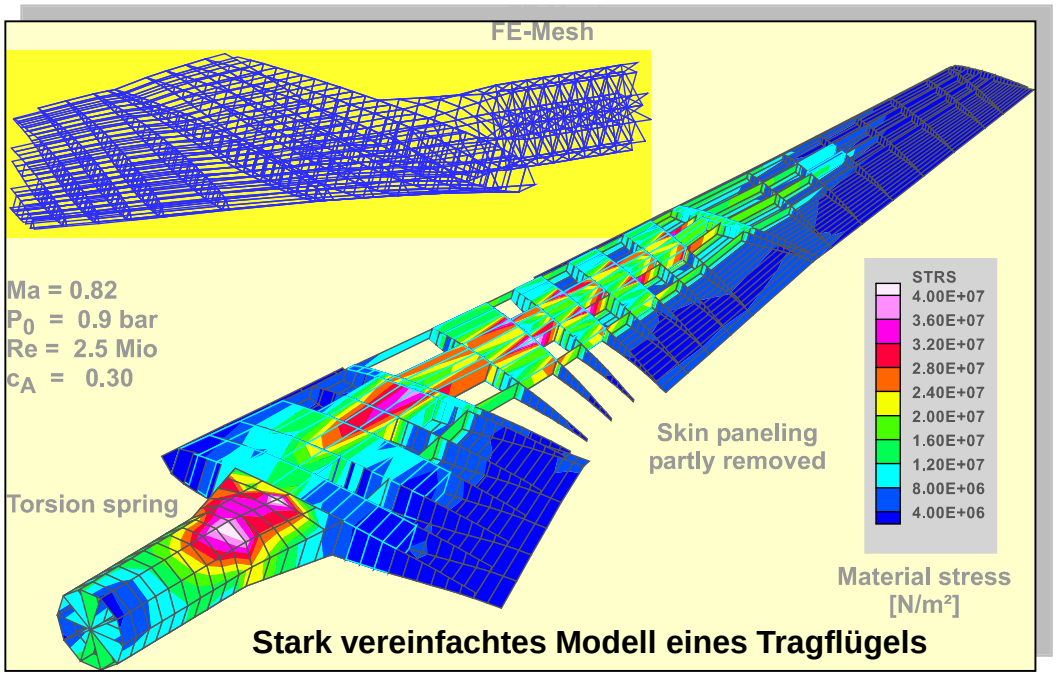
$$c_\sigma\left(\mathbf{x}_S\right) := \frac{\sigma(\mathbf{x}_S)}{\frac{1}{2}\,\varrho_\infty \cdot u_0^2}$$





Kennt man die flächenhafte Wirbeldichte aus der Lösung der Integralgleichung, dann kann man mit der Annahme der Plattengrenzschicht rekursiv auch die Verteilung der Schubspannung bestimmen.

Berechnung von Druck und Schubspannung aus der flächenhaften Wirbeldichte
Integrale Werte: Auftrieb und Widerstand



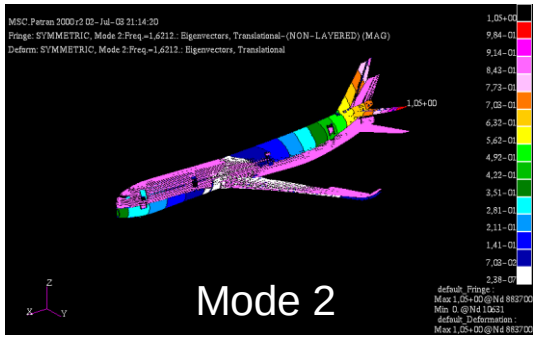
Stark vereinfachtes Modell eines Tragflügels

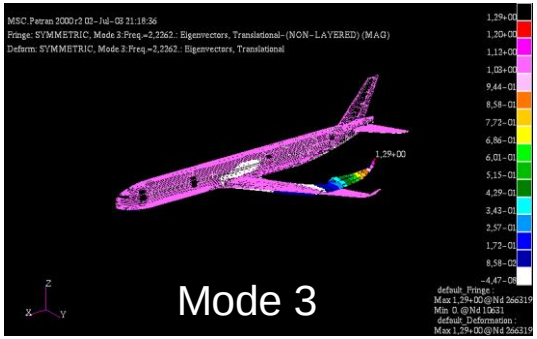
Tragflügel sind elastische Strukturen, die charakteristische Eigenschwingungen (Moden) aufweisen. Unter Belastung durch Luftkräfte verformen sie sich.

Berechnung der Moden führt zu großen linearen Gleichungssystemen.

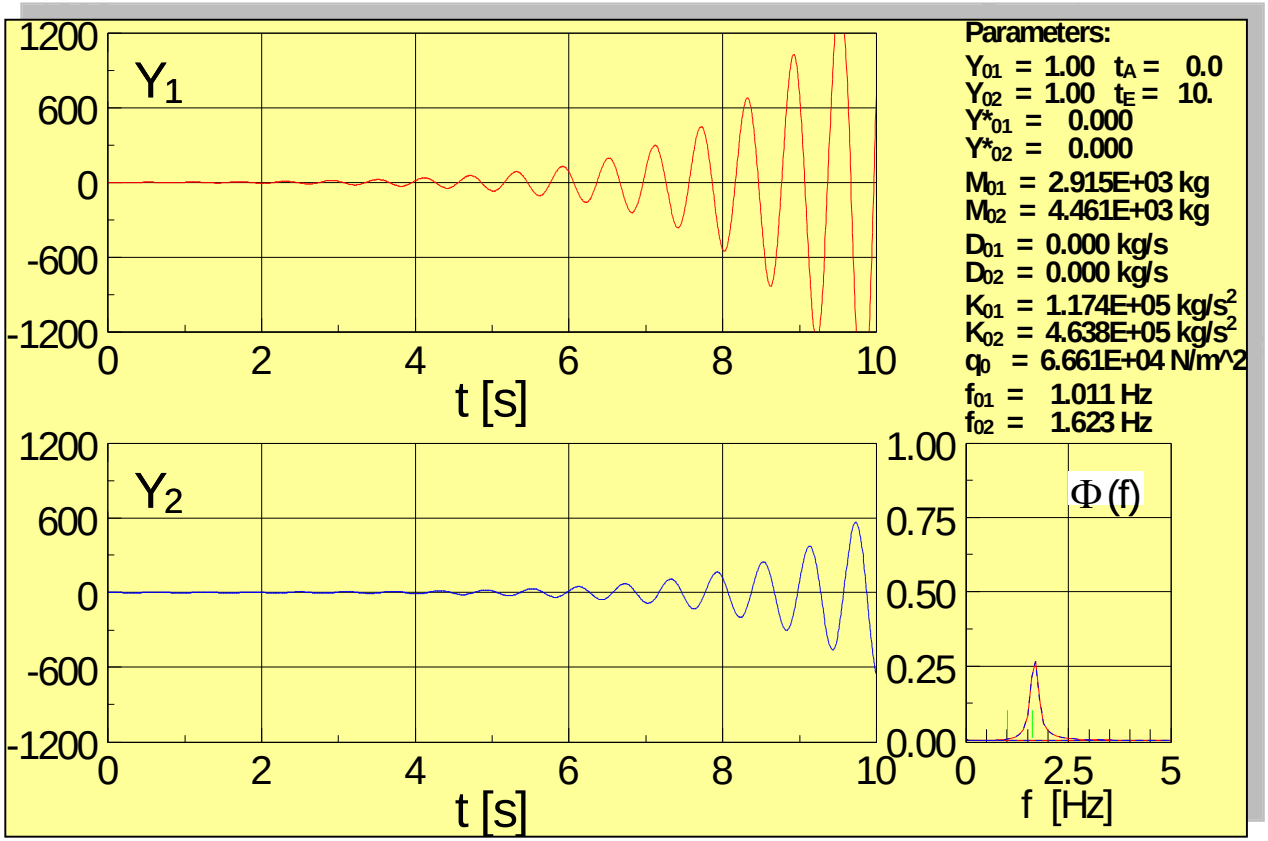
Nach spontaner Belastung/Entlastung (Windböe) setzen Schwingungen ein. Die Eigenschwingungen führen zu periodischen Reaktionskräften des Fluids.

Oberhalb einer Grenzgeschwindigkeit werden die Schwingungen instabil: Das gefährliche „Flattern“





Tragflügel und Eigenschwingungen – Typische Moden eines großen Transportflugzeugs



Die ersten beiden von 25 integrierten Moden (großes Transportflugzeug):

Instabile Lösung

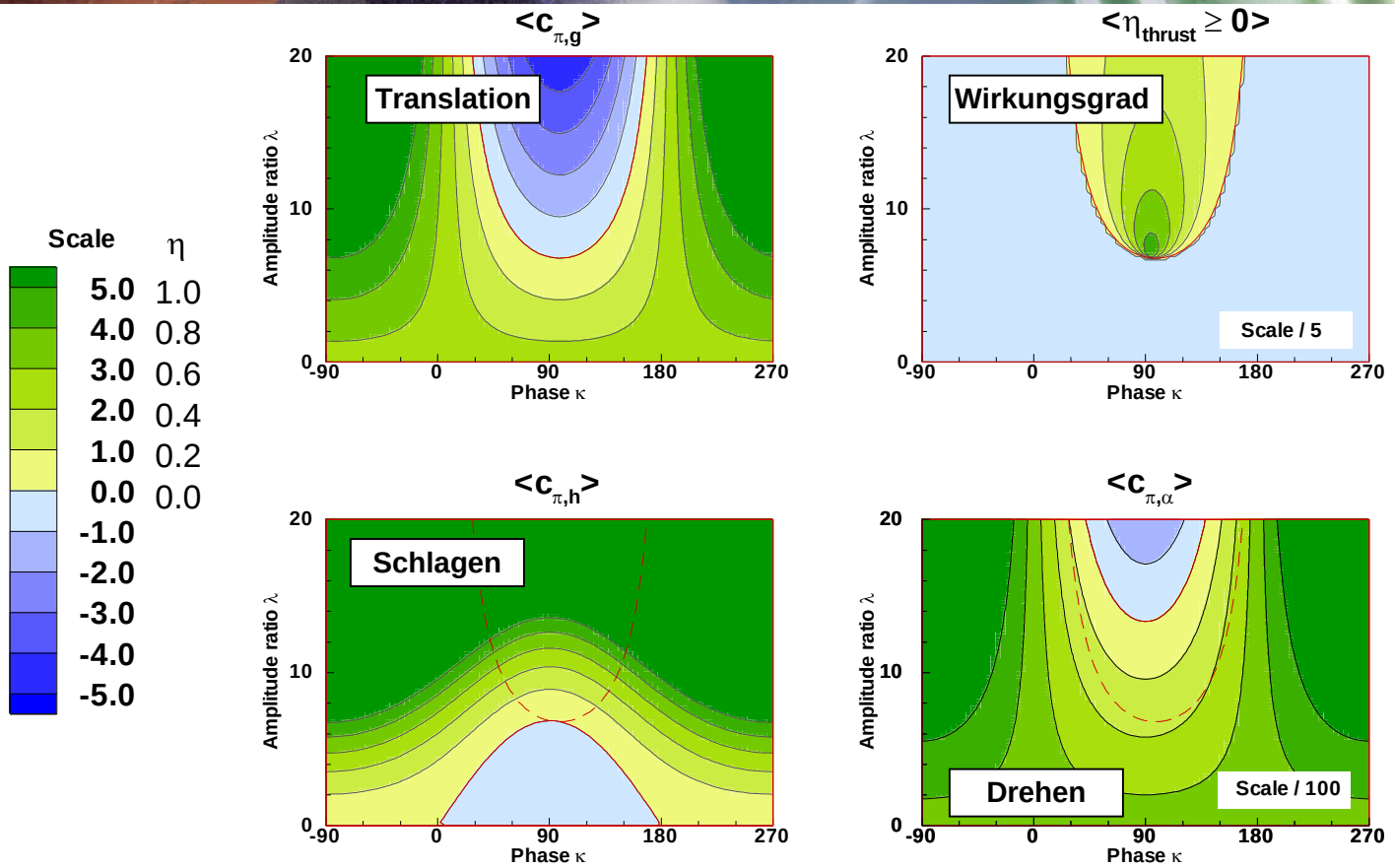
Untersucht wird eine Schwingungsgleichung.

Die äußeren Kräfte **f** sind die Reaktionskräfte des Fluids.

M sind die Massen, **D** die Dämpfungen und **K** die Steifigkeiten der Struktur.

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{D}\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}(t)=\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)$$

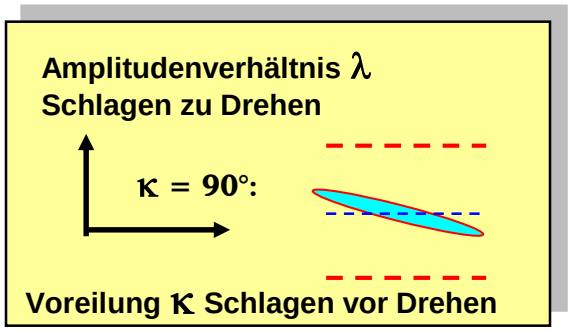
Instabilität eines Tragflügels bei steigender Geschwindigkeit
Auslösung der Schwingungen durch Böen



Basic mechanism of animal propulsion in 2D section

Coupled pitching and plunging motion; thin plate approximation, $\omega^* = 0.15$, $\xi_p = 0.25$

$$\eta_{thrust} = \frac{thrust \;\; power \;\; gained}{power \;\; pitch + plunge}$$



Die Grafik zeigt das Prinzip des Leistungsaustausches. Bei Schlagen und Drehen wird Leistung aufgebracht, bei der Translation Leistung gewonnen. Der Wirkungsgrad gibt den Verlust an das Fluid an.

Leistungsaustausch mit dem Fluid beim Schwingenflug der Lebewesen
Gekoppelte Schlag- und Drehschwingung erzeugt Schubleistung